

CORRECTION TD - O4

ONDES PROGRESSIVES

Ex. n°1 • Équation d'une OP

☆☆☆

4103

[1] Oui, c'est une OPH qui se propage dans le sens des x croissants car $s_1(x, t) = A \cos(kx - 2\pi ft) = A \cos(k(x - ct)) = f(x - ct)$ avec :

$$c = \frac{2\pi f}{k} = \frac{\omega}{k}.$$

[2] On utilise des relations trigonométriques :

$$\sin(kx) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} (\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t))$$

Il s'agit d'une superposition d'une OPH+ et d'une OPH- de même pulsation et de même amplitude. On appelle cette onde une onde stationnaire.

[3] Non, à cause du $e^{-\lambda t}$.

[4] Oui, on a bien : $s_4(x, t) = f(u) = A e^{\omega u} \cos(\omega u)$ avec $u = t - x/c$ et $c = \omega/k$. Sens des x croissants.

[5] Non, il s'agit d'une superposition de deux OPH de pulsations quelconques. Sauf cas particulier, ce n'est pas une OPH. Pour que cette superposition soit une onde progressive au sens d'une fonction de la forme $f(t - x/c)$, il faut que les deux composantes aient la même célérité, c'est-à-dire $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$.

[6] Oui, on utilise des relations trigonométriques :

$$s_6(x, t) = A \sin(\omega u) + A \sin(2\omega u)$$

Avec $u = t - x/c$ et $c = \omega/k$. Sens des x croissants.

2)

$$s(x, t) = A e^{-(kx - \omega t)^2} \quad \text{avec : } c = \frac{\omega}{k}$$

3)

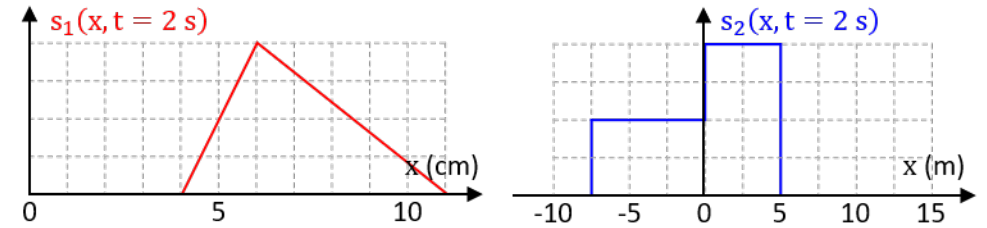
$$s(x, t) = A \cos^2(\omega t + kx) \quad \text{avec : } c = \frac{\omega}{k}$$

Ex. n°2 • Représentations temporelle et spatiale d'une OP

☆☆☆

7904

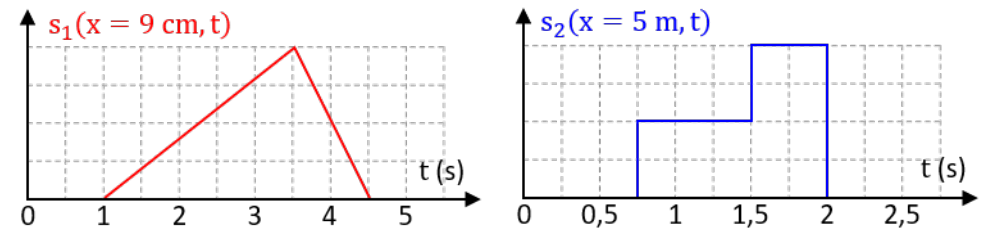
1) Profil spatial des signaux à $t = 2$ s.



2) Temps d'arrivée du signal au niveau des capteurs :

$$t_1 = \frac{d_{\text{capteur}}}{c} = \frac{2}{2} = 1 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{d_{\text{capteur}}}{c} = \frac{7,5}{10} = 0,75 \text{ s}$$

3) Profil temporel des signaux au niveau des capteurs :



Ex. n°3 • Lecture d'un oscillogramme

☆☆☆

1163

1) Lecture graphique :

S_m (V)	$\langle s \rangle$ (mV)	T (μ s)	f (kHz)	ω ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
1,00	500	380	2,63	$16,5 \times 10^3$
0,68	200	380	2,63	$16,5 \times 10^3$

2) Le signal 1 est en avance sur le signal 2, car il atteint sa valeur maximale avant.

3) La différence de temps entre les maxima des deux signaux est :

$$\Delta \tau = 100 \text{ } \mu\text{s} = \frac{\Delta \varphi}{\omega} \Rightarrow \Delta \varphi = \omega \Delta \tau = 1,65 \text{ rad} = 95^\circ$$

Remarque : le signal 1 est maximum au moment où le signal 2 passe par sa valeur

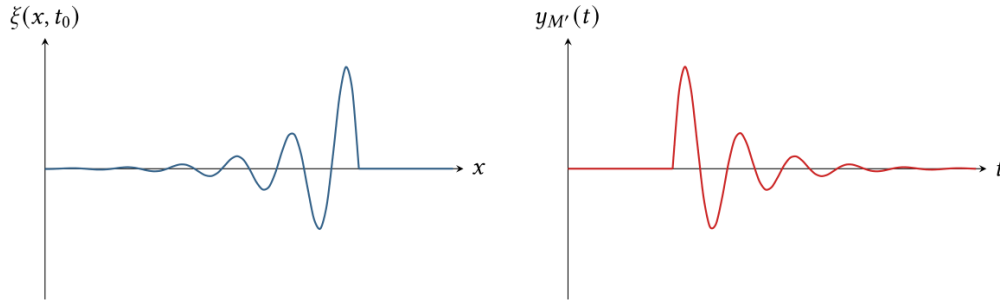
moyenne.

Cela signifie que les deux signaux sont approximativement en quadrature de phase, ce qui est cohérent avec le résultat trouvé, soit $\Delta\varphi \simeq 90^\circ$ (si l'on tient compte de la précision de la lecture de $\Delta\tau$).

Ex. n°4 • Onde sur une corde

★★★ 5965

1)



2) On connaît :

$$F(t) = \xi(x=0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ H e^{-t/\tau} \sin(\omega t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$F(t - x/c) = \xi(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > ct \\ H e^{-(t-x/c)/\tau} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) & \text{si } x \leq ct \end{cases}$$

Ex. n°5 • Ondes progressives harmoniques

★★★ 0977

1) La célérité vaut :

$$c = \frac{2,4 \times 10^3 \pi}{7,0 \pi} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) L'onde a pour équation (signe « - » car propagation selon les x croissants) :

$$s_2(x, t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - kx\right)$$

On en déduit l'allure du signal reçu en $x = \lambda/4$.

$$s_2\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{k\lambda}{4}\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{4}\right) = s_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

3) L'onde se réfléchit en $x = L$. Elle a pour expression générale :

$$s_{2r}(x, t) = s_r \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + kx + \phi\right)$$

D'après ce qu'indique l'énoncé, l'onde résultante en $x = L$ vaut :

$$s_{tot}(L, t) = s_2(L, t) + s_{2r}(L, t) = 0$$

Cette condition est satisfaite pour tout t si :

$$s_r = s_0 \quad \text{et} \quad \phi = -2kL + \pi \quad \Rightarrow \quad s_{2r}(x, t) = -s_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + k(x - 2L)\right)$$

4) L'onde a pour équation (signe « + » car propagation selon les x décroissants) :

$$s_3(x, t) = s_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

On en déduit le profil spatial de l'onde à $t = T/4$.

$$s_3\left(x, \frac{T}{4}\right) = s_0 \cos\left(\frac{\omega T}{4} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -s_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Ex. n°6 • Retard dû à la propagation

★★★ 8639

1) L'OPH qui se propage est de la forme :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx)$$

L'onde reçue en x est en phase avec l'onde émise en $x = 0$ si les deux phases diffèrent d'un multiple entier de 2π .

$$\underbrace{\omega t}_{x=0} - \underbrace{(\omega t - kx)}_{x \text{ quelconque}} = 2\pi p \quad \text{avec : } p \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

$$x = \frac{2\pi p}{k} \quad \text{avec : } \boxed{x = p\lambda}$$

2) En opposition de phase, les deux signaux sont déphasés de π (modulo 2π).

$$\underbrace{\omega t}_{x=0} - \underbrace{(\omega t - kx)}_{x \text{ quelconque}} = 2\pi p + \pi \quad \text{avec : } p \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

$$x = \frac{2\pi \left(p + \frac{1}{2}\right)}{k} \quad \text{avec : } \boxed{x = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda}$$

Ex. n°7 • Propagation sur une cuve à ondes

☆☆☆

1055

1) La longueur d'onde est la période spatiale des vaguelettes le long d'un rayon, c'est-à-dire la distance entre deux raies foncées ou claires successives. En utilisant l'échelle, on trouve $\lambda = 1,5$ cm. La célérité vaut donc : $\boxed{c = \lambda f = 0,30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

2) Pour $x > 0$, l'onde se propage dans le sens des x croissants et s'écrit donc :

$$h_+(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Réciproquement, pour $x < 0$, l'onde se propage dans le sens des x décroissants et s'écrit alors :

$$h_-(x, t) = A_0 \cos(\omega t + kx + \phi)$$

La phase initiale ϕ est la même pour les deux fonctions, car elles doivent coïncider à tout instant en $x = 0$.

Toutefois, au cours de la propagation, l'énergie que le vibreur transmet à la surface de l'eau se répartit sur des cercles de plus en plus grands. Il est donc raisonnable que l'amplitude de l'onde diminue au fur et à mesure que le cercle s'agrandit. Cela se voit d'ailleurs sur la figure, où le niveau de gris est de moins en moins marqué lorsque l'on s'éloigne du centre.

3) Par définition,

$$\int_0^{2\pi} \langle h(r, t)^2 \rangle r d\theta = \int_0^{2\pi} A^2(r) \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle r d\theta = \frac{r A^2(r)}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi r A^2(r)$$

S'agissant d'une constante, on peut l'exprimer au niveau de la pointe :

$$\pi r A^2(r) = \pi b A_0^2 \Rightarrow \boxed{A(r) = A_0 \sqrt{\frac{b}{r}}}$$

ONDES STATIONNAIRES

Ex. n°8 • Corde de guitare

☆☆☆

8622

1) On cherche c sous la forme (la constante de proportionnalité vaut 1) :

$$c = T^\alpha \mu^\beta$$

En termes d'unité, l'équation devient

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\alpha \times (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})^\beta \Rightarrow \begin{cases} \text{kg} \rightarrow 0 = \alpha + \beta \\ \text{m} \rightarrow 1 = \alpha - \beta \\ \text{s} \rightarrow -1 = -2\alpha \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 565 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2) On cherche la fréquence du mode 1 (mode fondamental). L'OSH dans la corde attachée à ses deux extrémités vaut :

$$y(x, t) = Y_0 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi) \quad \text{avec : } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

On en déduit la fréquence fondamentale :

$$\boxed{f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{ck_1}{2\pi} = \frac{c}{2L} = 440 \text{ Hz}}$$

Ex. n°9 • Double haut-parleur

☆☆☆

1792

Calculons la longueur d'onde correspondant à la fréquence f .

$$\lambda = \frac{c}{f} = 20 \text{ cm}$$

Le micro est donc situé à 2λ de l'un des haut-parleurs et à 4λ de l'autre haut-parleur. Les deux ondes sont donc en phase. L'interférence est constructive : l'amplitude est maximale.

Ex. n°10 • La flûte de Pan



0334

1) Un **nœud** est un point où l'amplitude de vibration est nulle. Un **ventre** est un point où l'amplitude de vibration est maximale (ici, égale à P_0).

2) L'amplitude de la vibration est donnée par :

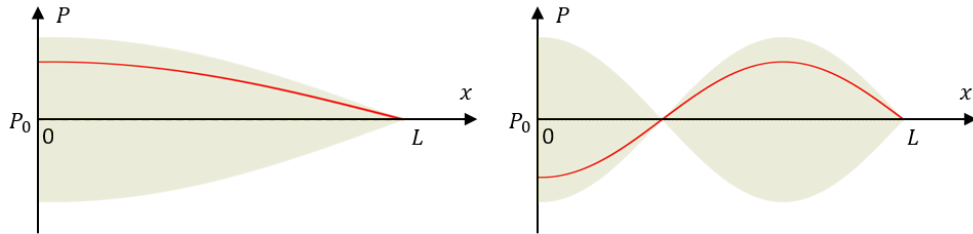
$$A(x) = \left| P_0 \cos(kx + \varphi) \right| = \left| P_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right) \right|$$

La fonction $\left| P_0 \cos(kx + \varphi) \right|$ étant π -périodique, ce que demande l'énoncé est immédiat.

Exemple numérique avec $\varphi = 0$ (choix arbitraire qui décale la courbe et qui ne modifie donc pas les distances recherchées) :

- Ventre en $x = 0$ car $A(0) = P_0$
- Nœud en $x = \lambda/4$ car $A(\lambda/4) = 0$
- Ventre en $x = \lambda/2$ car $A(\lambda/2) = P_0$
- Nœud en $x = 3\lambda/4$ car $A(3\lambda/4) = 0$
- Etc.

3) Voici les deux premiers modes propres.



On a :

$$P(x, t) = P_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \phi)$$

En $x = 0$ se situe un ventre de vibration :

$$A(0) = P_0 \cos(\varphi) = P_0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0} \Rightarrow P(x, t) = P_0 \cos(kx) \cos(\omega t + \phi)$$

En $x = L$ se situe un nœud de vibration :

$$A(L) = P_0 \cos(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi - \frac{\pi}{2} \text{ avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

On en déduit les longueurs d'onde des modes propres, ce qui est bien cohérent avec le schéma précédent.

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{2n-1} \text{ avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

On en déduit :

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n-1) \frac{c}{4L} \text{ avec : } n \in \mathbb{N}^*$$

4) On veut qu'un tuyau émette un fondamental ($n = 1$) à 262 Hz.

$$f_1 = \frac{c}{4L} \Rightarrow L = \frac{c}{4f_1} = 32,6 \text{ cm}$$

Ex. n°11 • Four à micro-ondes



0337

Longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{c}{f} = 12,2 \text{ cm}$$

Un four à micro-ondes fait typiquement 40 cm de côté, soit 3–4 fois la longueur d'onde. Des ondes stationnaires peuvent se développer car le milieu est fini et que les ondes électromagnétiques sont réfléchies par les parois.

Le plateau tournant permet de s'assurer qu'un aliment ne reste pas au niveau d'un nœud du champ électrique.

Ex. n°12 • Corde de Melde



9217

1) D'après le principe de superposition,

$$\xi(z, t) = \xi_i(z, t) + \xi_r(z, t) = 2a \cos(\omega t) \cos(kz + \phi)$$

Il ne s'agit pas d'une onde progressive, mais d'une onde stationnaire.

2) L'amplitude de vibration au point d'abscisse z est donnée par :

$$a(z) = 2a |\cos(kz + \phi)| \geq 0$$

On constate qu'elle dépend de z : la présence des ventres et des nœuds s'interprète comme des interférences constructives ou destructives entre l'onde incidente et l'onde réfléchie.

Les ventres correspondent aux abscisses z_v ($v \in \mathbb{Z}$ a priori) telles que :

$$\cos(kz_v + \phi) = \pm 1 \Rightarrow kz_v + \phi = v\pi \Rightarrow z_v = \frac{v\pi - \phi}{k}$$

Sachant que $k = 2\pi/\lambda$, on conclut

$$z_v = \frac{v\pi - \phi}{2\pi} \lambda$$

Deux ventres consécutifs sont donc distants de $\lambda/2$.

Les nœuds correspondent aux abscisses z_n ($n \in \mathbb{Z}$ a priori) telles que :

$$\cos(kz_n + \phi) = 0 \Rightarrow kz_n + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow z_n = \frac{n\pi - \phi + \pi/2}{k}$$

Sachant que $k = 2\pi/\lambda$, on conclut

$$z_n = \frac{n\pi - \phi + \pi/2}{2\pi} \lambda$$

Deux nœuds consécutifs sont donc distants de $\lambda/2$, et un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

3) La condition limite en $z = 0$ impose :

$$a(0) = 2a |\cos(\phi)| = 0$$

Donc $\phi = -\pi/2$ convient. On en déduit :

$$a(z) = 2a |\sin(kz)|$$

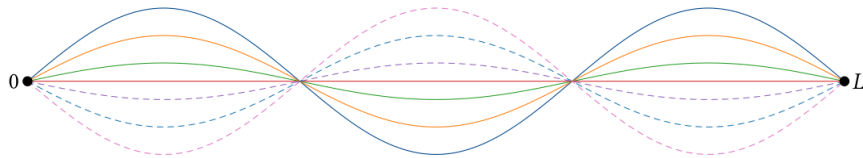
4) La condition limite en $z = L$ impose :

$$a(L) = 2a |\sin(kL)| = 0 \Rightarrow \boxed{kL = n\pi \text{ avec : } n \in \mathbb{N}^*}$$

On en déduit :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } f_n = \frac{nc}{2L}}$$

5)



6) La condition limite en $z = L$ est inchangée et donne :

$$a(L) = 2a |\cos(kL + \phi)| = 0 \Rightarrow kL + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

La condition limite en $z = 0$ s'écrit maintenant

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t) \Rightarrow A = 2a \cos(\phi)$$

Or,

$$\cos(\phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - kL + n\pi\right) = -\sin(-kL + n\pi) = \sin(kL - n\pi) = (-1)^n \sin(kL)$$

On en déduit :

$$a = (-1)^n \frac{A}{2\sin(kL)}$$

Par le même raisonnement,

$$\cos(kz + \phi) = (-1)^n \sin(k(L - z))$$

En conclusion, les $(-1)^n$ se compensent et on obtient le résultat escompté

$$\xi(z, t) = A \frac{\sin(k(L - z))}{\sin(kL)} \cos(\omega t)$$

7) L'onde est toujours stationnaire, avec des nœuds séparés de $\lambda/2$. Le nombre de nœuds observables est donc relié à la partie entière :

$$N = \left\lfloor \frac{2Lf}{c} \right\rfloor + 1$$

8) Si la corde est excitée à l'une de ses fréquences propres, alors $\sin(kL)$ s'annule et l'amplitude de vibration devrait diverger en tout point ! C'est évidemment impossible, car la corde est inextensible et des effets non linéaires viennent limiter cette amplitude. Toutefois, on observe bien un phénomène de résonance, avec une amplitude de vibration maximale par rapport à celle observée pour des fréquences d'excitation voisines.